

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики
А.М. Райгородский**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Торическая геометрия
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.Ю. Перепечко, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 25.03.2022

Аннотация

Ознакомление с основными понятиями торической геометрии. Теория торических многообразий в алгебраической геометрии, или торическая геометрия, устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными алгебраическими многообразиями с действием комплексного тора, имеющим плотную (открытую по Зарисскому) орбиту, комбинаторными объектами, называемыми веерами. При помощи вееров алгебро-геометрические свойства торических многообразий полностью переводятся на язык комбинаторики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Главной целью курса является понимание важных свойств когомологии гладкого алгебраического многообразия в торическом многообразии. Особое внимание выделяется следующим темам: двойственность Пуанкаре, двойственность Серра, кольцо Stanley-Reisner, теорема Римана-Роха-Хирцебруха, классы Тодда, смешанная структура Ходжа когомологии аффинной гиперповерхности.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области алгебраической геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области алгебраической геометрии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории торической геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач торической геометрии;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов торической геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Аффинные торические многообразия.	5	5		20
2	Точки решетки	5	5		20
3	Дивизоры на торическом многообразии	5	5		10
4	Расслоения на торическом многообразии	5	5		10
5	Многогранники Ньютона	5	5		10
6	Двойственность Серра	5	5		5
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Аффинные торические многообразия.

Конусы и веера. Проективные многообразия.

2. Точки решетки

Веера и нормальные торические многообразия. Соответствие между конусами и орбитами.

3. Дивизоры на торическом многообразии

Дивизоры Вейля и Картье.

4. Расслоения на торическом многообразии

Когерентные пучки. Обильные дивизоры на полном торическом многообразии.

5. Многогранники Ньютона

Однородные координаты – кольцо Кокса.

6. Двойственность Серра

Кольцо Stanley-Reisner. Теорема Римана-Роха-Хирцербруха, классы Тодда, смешанная структура Ходжа когомологии аффинной гиперповерхности.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Алгебраическая геометрия для всех [Текст] = Undergraduate algebraic geometry/М. Рид, -М., Мир, 1991

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	А.Ю. Перепечко, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Торическая геометрия» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории торической геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикл;
- основные свойства соответствующих математических объектов.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач торической геометрии;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов торической геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Проверьте, что конечное подмножество аффинного пространства является алгебраическим.
2. Вычислите размерность касательного пространства кривой $x^2 - y^3 = 0$ в точках $(0,0)$ и $(1,1)$.
3. Приведите пример биективного морфизма, не являющегося изоморфизмом.
4. Постройте бирациональное отображение из проективной плоскости в $P^1 \times P^1$.
5. Задайте уравнениями образ проективной плоскости при отображении Веронезе степени 2.
6. Аффинные торические многообразия.
7. Конусы и веера.
8. Проективные многообразия.
9. Точки решетки.
10. Веера и нормальные торические многообразия.
11. Соответствие между конусами и орбитами.
12. Дивизоры на торическом многообразии.
13. Дивизоры Вейля и Картье.
14. Расслоения на торическом многообразии.
15. Когерентные пучки.
16. Обильные дивизоры на полном торическом многообразии.
17. Многогранники Ньютона.
18. Однородные координаты – кольцо Кокса.
19. Двойственность Серра.
20. Кольцо Stanley-Reisner.
21. Теорема Римана-Роха-Хирцербруха, классы Тодда, смешанная структура Ходжа когомологии аффинной гиперповерхности.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Лемма Нётер о нормализации. Её геометрический смысл.
2. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.
3. Локализация нётерова кольца по мультипликативному подмножеству нётерова.
4. Целое расширение алгебр конечно.
5. Совпадает ли топология Зарисского на A^2 с топологией прямого произведения на $A^1 \times A^1$?
6. Аналитическое выражение движения. Два вида движений. Классификация движений плоскости.
7. Понятие аффинной и декартовой систем координат на плоскости и в пространстве. Понятие репера. Примеры.
8. Векторы в пространстве. Координаты вектора. Векторное и смешанное произведения векторов и их свойства. Площадь треугольника и объём тетраэдра.
9. Деление отрезка в данном соотношении. Простое отношение трёх точек.
10. Различные уравнения плоскости в пространстве. Примеры.
11. Ориентация плоскости. Угол между векторами на ориентированной плоскости.
12. Общее уравнение плоскости. Особенности расположения плоскости относительно системы координат.
13. Формулы преобразования координат. Полярные координаты точки.
14. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
15. Различные уравнения прямой на плоскости. Общее уравнение прямой.
16. Движения пространства, их классификация. Преобразования подобия. Гомотетия.

17. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Угол между прямыми.
18. Аффинные преобразования плоскости и пространства. Примеры.
19. Эллипс как линия второго порядка и его основные свойства.
20. Поверхности второго порядка. Понятие о методе сечений. Направляющие поверхности второго порядка.

Письменные задачи:

Пример: Пусть V аффинное торическое многообразие, определяемое полугруппой S . А) Доказать, что существует биекция между следующими объектами. 1. Точка на V , 2. Максимальный идеал кольца $C[S]$, 3. Гомоморфизм $S \rightarrow C$, где C рассматривается как полугруппа под умножением. Б) Проиллюстрировать выше упомянутое соответствие для S , порожденная векторами $\{(1,0,1), (0,2,3), (1,1,2)\}$.

Пример задачи : Рассмотрим конус Σ , порожденный векторами $\{(1,0,0), (0,1,0), (1,0,3), (0,1,1)\}$.

1. Найти порождающие целочисленной решетки, содержащейся в конусе, двойственном конусу Σ .
2. Найти торический идеал, определяемый данной целочисленной решёткой. 15:55

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.